X-G Algèbre p 236
Rombaldi p 610

f ss $\Rightarrow f$ diag, réci fausse $\mathrm{Mat}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
et $\pi_T(X) = (X-1)^2(X-2)$ avec facteur carré.

122
125
141
151
153
154

Développement : caractérisation des endomorphismes semi simples

Théorème : $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi simple ssi π_f est sans facteur carré.

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Ecrivons $\pi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} P_k^{d_k}$ sa décomposition en fact irr de $\mathbb{K}[X]$, par factorialité (les $(P_k)_{1\leq k \leq n}$ étant tous distincts et unitaires).

ss = sous espace stable

Par le lemme des noyaux, on a que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} \ker P_k^{d_k}(f) = \bigoplus_{k=1}^{n} N_k$.

(1) **Lemme :** Soit F un ses de E. On pose $F_k = F \cap N_k$. Alors :
$$F = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$$

Preuve :

- Soit F un ses de E. On pose $F_k = F \cap N_k$. Les (F_k) sont en somme directe car les (N_k) le sont. Puisque tous les F_k sont inclus dans F, on a $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k \subset F$.
- Réciproquement, on note p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{i\neq j} N_j$. Puisque p_i est un pol en f et F est f stable, on a que $p_i(F) \subset F$ mais par ailleurs $p_i(F) \subset \mathrm{Im}(p_i) = N_i$ donc $p_i(F) \subset F \cap N_i = F_i$. Comme $\sum p_k = id_E$ on en déduit que $F = \sum_{k=1}^{n} p_k(F) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$

(2) **Lemme :** Supposons π_f irréductible. Alors f est semi simple.

- Soit $F \subsetneq E$, f stable. Soit $x_1 \in E \setminus F$ et $E_1 = \mathbb{K}[f](x_1)$. C'est un sous esp f stable. Comme π_{f,x_1} est le pol min de $f_{|E_1}$, on a $\pi_{f,x_1} \mid \pi_f$ donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ par irréductibilité.
- Supposons qu'il existe $y = P(f)(x_1) \in E_1 \cap F$ tq $y \neq 0$. Comme π_{f,x_1} est irr et $\pi_{f,x_1} \nmid P$ (sinon $y=0$), P et π_{f,x_1} sont premiers entre eux. Par Bézout il existe U, V tq $UP + V\pi_{f,x_1} = 1$ et donc $x_1 = U(f)(y) \in F$ car F est f stable, ABS.
- Donc $E_1 \oplus F$. Si $E_1 \oplus F = E$, c'est terminé. Sinon on prend $x_2 \in E \setminus (E_1 \oplus F)$ et on recommence. En un nombre fini d'itérations, on obtient $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ sous espace f stable supplémentaire de F.
car on est en dimension finie

On montre le théorème :

③ Supposons Π_f sans facteur carré.

Soit F un sev f stable. On écrit $F = \bigoplus_{k=1}^{n} F \cap N_k = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$ où $N_k = \ker P_k(f)$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme N_k est f stable, on regarde $f_{|N_k}$ qui admet pour polynôme minimal P_k qui est irréductible donc d'après ② il existe G_k supplémentaire f stable de F_k dans N_k. Alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} (F_k \oplus G_k) = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} F_k\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} G_k\right) = F \oplus G$$

où G est f stable puisque chaque (G_k) l'est. Donc f est semi simple.

④ Supposons f semi simple et un des (α_k) strictement supérieur à 1, par exemple α_i. On pose $F = \ker P_i(f)$ qui est f stable.

f est semi simple donc il existe un supp G f stable. On pose $H_i = \frac{\Pi_f}{P_i^2}$. Alors $P_i H_i(f)(G) \subset F$ puisque $P_i(f)(P_i H_i)(f)(G) = \Pi_f(f)(G) = 0$ et $P_i H_i(f)(G) \subset G$ par f stabilité de G. Donc $P_i H_i(f)(G) \subset F \cap G = \{0\}$.

$H_i(f)(F) \subset F$ car H_i pol en f et F f stable

D'autre part $P_i H_i(f)(F) \subset P_i(f)(F) = \{0\}$, donc $P_i H_i$ est un polynôme annulateur de f. Or $d^\circ P_i H_i < d^\circ P_i^2 H_i = d^\circ \Pi_f$, ABS.

Ainsi tous les (α_k) sont égaux à 1 et Π_f est sans facteur carré.